Problemario

XVIII Olimpiada Universitaria de Matemáticas

Elaborado por:
Malors Emilio Espinosa Lara
José Manuel Sánchez Martínez
José Javier Gutiérrez Pineda

Olimpiadas de Matemáticas

Las Olimpiadas de Matemáticas son concursos entre alumnos del nivel medio superior, que incluyen la solución de problemas matemáticos que no requieren de un cúmulo de conocimientos, sino de ingenio, imaginación, creatividad y espíritu de búsqueda. Con esto se busca fortalecer el interés de los participantes para profundizar en el estudio de esta ciencia.

Inscripciones

- ✓ Podrán participar los alumnos de escuelas preparatorias, politécnicas, módulos e incorporadas a la Universidad de Guadalajara.

- ✓ Para su realización, la Olimpiada será dividida en dos niveles.
  Nivel I: alumnos de primero, segundo y tercer semestre.
  Nivel II: alumnos de cuarto semestre en adelante.

- ✓ Cada plantel puede inscribir un máximo de cuatro alumnos en el nivel I y dos en el nivel II con los siguientes datos:
  - Nombre completo de los alumnos de su selección.
  - Semestre en el que cursan.
  - Nivel en el que participarán.
  - Nombre completo del profesor que los acompañará.

- ✓ La inscripción se realizará en la página de Internet:
  http://www.olimpiadas-matematicas-jalisco.org

- ✓ Las inscripciones se cerrarán el día **viernes 19 de Octubre de 2007**.

Concurso

Fecha: Sábado 27 de Octubre de 2007
Hora: 8:30 horas
Sede: Escuela Preparatoria 12
Corregidora No. 500 (Calle 40), S.R.,Tlaquepaque, Jal. C.P. 44420
Teléfono(s): 3617-1980, 3617-1870

El examen del concurso consta de cinco problemas sobre matemáticas elementales que se deberán resolver en un tiempo máximo de 4:30 horas.

La participación es individual.

Los participantes deberán presentarse con lápices, colores y estuche de geometría.

No se permitirá el uso de calculadores ni tablas matemáticas.

Resultados de la XVII Olimpiada Universitaria de Matemáticas
NIVEL I

Primeros Lugares

Alvarado Rodríguez Francisco Javier	Preparatoria Regional de La Barca
Arias Andrade Misael Adrián	Preparatoria Regional de Arandas
Godínez Castro Francisco Teodoro	Preparatoria 11
González Rodríguez Hércules Salvador	Preparatoria Regional de Atotonilco
Gutiérrez Sánchez Efraín Fernando	Colegio Reforma
Jiménez Bernardino Jorge Alejandro	Preparatoria de Jalisco
Landeros Cervantes Isaac J.	Preparatoria Regional de Zapotlanejo
Mercado Mercado Ignacio	Preparatoria 7
Olivarez Campo Omar	Preparatoria Santa Anita
Palomera Tejeda Emmanuel	Preparatoria 5
Rodríguez Ríos Kena Coral	Preparatoria Regional de Puerto Vallarta
Sánchez Martínez José Manuel	Preparatoria 7
Villaseñor Ochoa José Refugio	Preparatoria Regional de Ciudad Guzmán

Segundos Lugares

Álvarez Abundis Anaís Quetzal	Preparatoria Regional de Tala
Andrade Ramos Juan Carlos	Preparatoria 2
Arias Lozano Rafael Guadalupe	Preparatoria Regional de Arandas
Cosío Palomera Zulema Beatriz	Preparatoria Regional de Puerto Vallarta
Cruz Neri Lucero Carolina	Preparatoria 9
Delgado Valadez Jesús Estéfano	Preparatoria Regional de Lagos de Moreno
Díaz Ruelas Álvaro Patricio	Preparatoria 5
Garagarza Mariscal Heber Abelino	Preparatoria Regional de Tala
Gómez Ávila Jorge Luis	Preparatoria 8
González Navarro Héctor Omar	Colegio Reforma
González Rodríguez Horacio Emmanuel	Preparatoria Regional de Atotonilco
Guzmán Barragán Kiara	Preparatoria 5
López Guerrero María Gabriela	Preparatoria 11
Medina Zárate María Guadalupe	Preparatoria Regional de Atotonilco Módulo Ayotlán
Ontiveros Hernández Gerardo	Preparatoria Regional de Atotonilco
Ornelas Barajas Alejandra	Preparatoria Regional de Zapotlanejo
Paredes Luna Rosario	Preparatoria 6
Piña Vásquez Martín Nicolás	Preparatoria de Tonalá
Ramos Huízar Nancy Paulina	Preparatoria de Jalisco
Romero González José Manuel	Preparatoria Regional Ahualulco Módulo San Marcos
Santiago Ventura Eldi Viridiana	Preparatoria Vocacional
Ventura Alfaro Georgina Guadalupe	Preparatoria Regional de Sayula
Vergara Moreno María Judith	Colegio Reforma

Terceros Lugares

Aguilera Rubio Mónica Mariana	Preparatoria 7
Arellano Sandoval Juan Francisco	Preparatoria 7
Arreola Rodríguez Félix	Preparatoria 12
Borbón Branca Eva Guadalupe	Escuela Preparatoria Occidental

Camberos Gallegos Isabel	Preparatoria Regional de Zacoalco de Torres
Campos Arrreguín Alicia	Preparatoria 12
Carrillo Cordero Nancy Adriana	Preparatoria Regional de Ahualulco Módulo Etzatlán
Del Río Mora Daniela	Preparatoria Regional de La Barca
Durán Gutiérrez Mónica	Preparatoria Regional de La Barca
Fregoso Carrillo Ma. del Consuelo	Preparatoria Regional de Ahualulco Módulo Etzatlán
Galindo de León Salvador	Preparatoria Regional de Chapala
González Martínez Karen Lilith	Preparatoria 3
Gutiérrez Vázquez María Elizabeth	Regional de San Juan Módulo San Miguel
Guzmán Veltrán Brian	Preparatoria Regional de Lagos de Moreno
Hernández Altamirano Diego Pablo	Prepartoria Regional de Arandas
Hernández Rodríguez Abraham	Preparatoria Regional de Degollado
Márquez Garibi Diego Eduardo	UTEG
Martínez Bustos Omar	Preparatoria Santa Anita
Mendoza Campos José Alberto	Preparatoria Regional de Chapala
Monep Dorien Beteran Peregrina	Preparatoria Regional de Autlán Módulo el Grullo
Ochoa Espinoza Fabián Josué	Preparatoria Regional de La Barca
Preza Palomino Cristina Elizabeth	Instituto Zapopan
Ramos Tadeo Dante	Preparatoria 5
Reyes Sánchez Claudia Guadalupe	Preparatoria Vocacional
Reynoso Marín Néstor Daniel	Preparatoria Vocacional
Rodríguez Inzunza Héctor Abgael	Instituto Zapopan
Rodríguez Zaragoza María Roxana	Preparatoria 12
Sánchez Muñoz Ábner	Preparatoria de Jalisco
Ventura Manjares Santiago	Preparatoria Regional de Sayula
Vergara Santibáñez Cristina	Preparatoria 8

Nivel II

Primeros Lugares

Aranda García Diego Santiago	Preparatoria 7
Domínguez Vega Rosa Xel-Ha	Preparatoria Regional de La Barca
Espinoza Rhotón Alfredo	Preparatoria Regional de Chapala
Rodríguez Rodríguez Rogelio Tonatihu	Preparatoria de Jalisco

Segundos Lugares

Álvarez Herrera Habib Yarul	Preparatoria Regional de Puerto Vallarta
Amézquita Castellanos Juan Ramón	Preparatoria 5
Castillo Rodríguez Ariana María	Preparatoria Regional de Tala
Enríquez Ortiz Javier Alejandro	Preparatoria 7
Pérez Muñoz Erika Paulina	Instituto América Centro

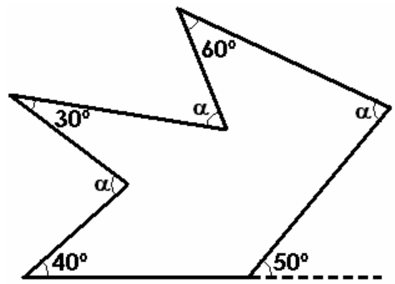
Terceros Lugares

Becerra Madera Jorge Humberto	Preparatoria 8
Chávez Castillo Cinthya Eloísa	Preparatoria Regional de Zacoalco de Torres
Rodríguez Guízar Víctor Alejandro	Preparatoria 12
Rubio Espinoza Misael Jesús	Preparatoria 11
Salazar Bravo Israel	Preparatoria 5
Torres Núñez Rebeca	Preparatoria 9

PROBLEMAS

PROBLEMA 1.
En cada subconjunto de siete elementos del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} ordénalos de menor a mayor y toma el elemento central. ¿Cuál es la suma de todos esos elementos?

PROBLEMA 2.
Obtén el valor de α en la siguiente figura:



PROBLEMA 3.
Una línea de camiones ha decidido premiar con pasaje gratis a todos las personas que la suma de las cifras del número que aparece en su boleto de camión sea 21. La promoción durará sólo por el mes de Enero, así que mandaron imprimir boletos que van del 1 al 2000. ¿Cuántos boletos de éstos darán pasaje gratis a los usuarios?

PROBLEMA 4.
Un número es "cuatreado" cuando al multiplicar sus cifras resulta un número que es múltiplo de 4. Por ejemplo, 452 es un número "cuatreado" ya que 4 x 5 x 2 = 40 que es múltiplo de 4. ¿Cuántos números de 3 cifras existen que **NO** sean "cuatreados"?

PROBLEMA 5.
Beatriz piensa en un número. Daniel le indica que debe multiplicarlo primero por 5, luego multiplicarlo por 9 y finalmente por 11. Daniel al tratar de adivinar el resultado le dice el número 3429 pero Beatriz le dice que tiene dos dígitos erróneos y que los otros dos están en su posición correcta. Encuentra todos los números posibles que pudo haber pensado Beatriz al inicio.

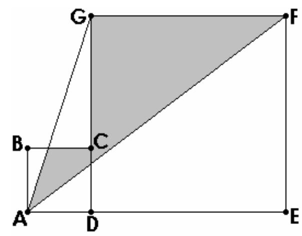
PROBLEMA 6.
La distancia entre dos ciudades A y B es de 999 kilómetros. A lo largo del camino están instalados letreros cada kilómetro, en los cuales la distancia entre A y B se marca de la siguiente manera:

0 | 999   1 | 998   2 | 997   • • •   998 | 1   999 | 0

¿En cuántos de estos letreros sólo se utilizan dos cifras diferentes para escribir los números que están en ellos? Por ejemplo, se utilizan tres cifras diferentes (2, 7, 9) en el letrero:

997 | 2

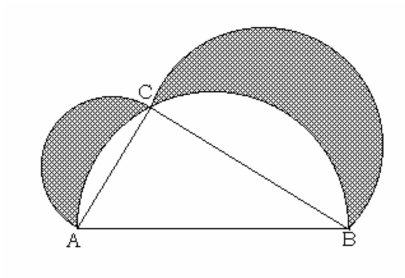
PROBLEMA 7.
Calcula el área sombreada de la siguiente figura, donde ABCD es un cuadrado de 3 cm de lado y DEFG es un cuadrado de 9 cm de lado:



PROBLEMA 8.
Determina el mayor valor de n, tal que $\frac{2007!}{7^n}$ es un número entero.

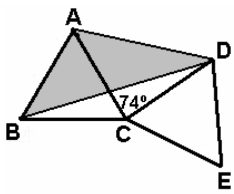
PROBLEMA 9.
Un niño hace una lista de 2007 números bajo el siguiente procedimiento: *Si n es el último número que puso en la lista, entonces el nuevo número de la lista resulta de sumarle 1 a la suma de los dígitos de n^2.* Por ejemplo, si un número de la lista es el 407, el siguiente número es el 32 porque tenemos que 407^2 = 165,649 y 1 + 6 + 5 + 6 + 4 + 9 + 1 = 32. Sabiendo que el primer número de la lista es el 2007, encuentra el último número que escribió el niño en la lista.

PROBLEMA 10.
En una semicircunferencia de diámetro AB se toma un punto C para formar un triángulo de 100 cm^2 de área. Utilizando como diámetros a los lados AC y BC del triángulo se construyen dos semicircunferencias como se muestra en la figura.
Determina el valor del área sombreada.



PROBLEMA 11.
Encuentra el menor número que existe que utiliza sólo las cifras 3 y 7 (por lo menos una de cada una) de manera que el número sea múltiplo de 3 y de 7.

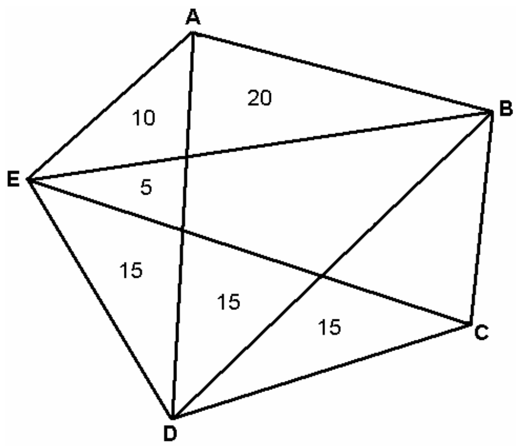
PROBLEMA 12.
En la figura, ABC y CDE son triángulos equiláteros iguales. Si el ángulo ACD mide 74º. Encuentra las medidas de los ángulos del triángulo ABD.



PROBLEMA 13.
¿Cuántas ternas ordenadas de números naturales (a, b, c) distintos de la unidad, hay tales que $a \cdot b \cdot c = 7^{39}$?

PROBLEMA 14.
Sea ABCDE un pentágono en el cual se trazan 4 de sus diagonales. Se conocen algunas de las áreas que se formaron con ellas como se muestra en la figura.

Encuentra el área del pentágono completo.



PROBLEMA 15.
Sea n un número natural. Encuentra los valores de n para los que $\frac{1+11n}{2n-1}$ es un entero.

PROBLEMA 16.
Encuentra todos los números capicúas de 3 dígitos tales que al multiplicarlos por 11 se obtiene otro número capicúa.

PROBLEMA 17.
Obtén todos los primos p tales que $p^2 + 77$ tiene exactamente 5 divisores.

PROBLEMA 18.
Sea ABC un triángulo escaleno de área 2007. Sea P un punto del lado BC y sean Q y R puntos sobre las rectas AC y AB respectivamente tales que AP, BQ y CR son paralelas. Encuentra el área del triángulo PQR.

XVII Olimpiada Universitaria de Matemáticas
Nivel 1

PROBLEMA 19.
¿Cuántas longitudes diferentes tienen las diagonales de un polígono regular de 2006 lados?

PROBLEMA 20.
Sobre el cuadrado ABCD se construye internamente un triángulo equilátero ABE y externamente un triángulo equilátero BCF. Demuestra que los puntos D, E y F están sobre una misma línea recta.

PROBLEMA 21.
De entre los números capicúas de 5 dígitos, ¿de cuáles hay más, múltiplos de 11 o de los que sus dígitos suman 21?
Un número es capicúa si al invertir el orden de sus dígitos, resulta el mismo número. Por ejemplo, 11, 232, 12321.

PROBLEMA 22.
Encuentra todos los enteros x, para los cuales $x^2 + 3x + 5$ es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 23.
El triángulo equilátero ABC está inscrito en un círculo. Si M es un punto del arco BC. Demuestra que MC + MB = MA.

XVII Olimpiada Universitaria de Matemáticas
Nivel 2

PROBLEMA 24.
Una computadora primitiva considera como cero a todos los números reales x que satisfacen la desigualdad:

$$|x| < \frac{1}{2010}$$

¿Para cuántos enteros positivos m, dicha computadora considera como cero al número $\frac{m-5}{2006m-2010}$?

PROBLEMA 25.
(a) Encuentra todos los números positivos de dos dígitos que se incrementan 75% cuando sus dígitos se invierten.
(b) Encuentra todos los números positivos de tres dígitos que se incrementan 75% cuando sus dígitos se invierten.

PROBLEMA 26.
El triángulo equilátero ABC está inscrito en un círculo. Si M es un punto del arco BC. Demuestra que MC + MB = MA.

PROBLEMA 27.
Se tienen 40 puntos en el plano, de manera que no hay tres colineales. A cada punto se le asigna un número del 1 al 40 sin repetición. Luego se une cada par de puntos mediante segmentos de recta de colores azul, rojo o verde de acuerdo a las siguientes condiciones:
- Si la suma de los números asignados a los puntos es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color azul.
- Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en uno es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color rojo.
- Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en dos es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color verde.

¿Cuántos triángulos se han formado con sus tres lados de diferente color?

PROBLEMA 28.
Si en el triángulo ABC el ángulo en B mide 62º y el ángulo en C mide 45º, D, E y F son los pies de las alturas desde A, B y C respectivamente. ¿Cuánto mide el ángulo FED?

SOLUCIONES

SOLUCIÓN 1.

Contemos en cuántos casos tenemos a cada número como elemento central. El conjunto elegido debe tener tres números menores que el elemento central y tres números mayores, así que el elemento central sólo puede ser 4, 5, 6 o 7. Así que dividamos el problema en casos:

Caso 1. Cuando el elemento central es el 4.
Los tres números menores que él ya están elegidos {1, 2, 3}, sólo falta escoger los tres números mayores que él del conjunto {5, 6, 7, 8, 9, 10}. Esto lo podemos hacer de $C_3^6 = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ formas.
Por lo que en este caso hay 20 subconjuntos donde el elemento central es el 4.

Caso 2. Cuando el elemento central es el 5.
Primero hay que elegir los tres números menores que él del conjunto {1, 2, 3, 4}, eso lo podemos efectuar de 4 formas ya que $C_3^4 = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 1} = 4$. Para elegir los tres números mayores, debemos utilizar el conjunto {6, 7, 8, 9, 10}, de lo cual escogemos de $C_3^5 = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ maneras. Así que en este caso tenemos 4 x 10 = 40 subconjuntos donde el elemento central es el 5.

Caso 3. Cuando el elemento central es el 6.
También hay 40 subconjuntos, ya que para elegir los tres números menores lo hacemos de $C_3^5 = 10$ maneras y para elegir los tres números mayores lo realizamos de $C_3^4 = 4$ modos.

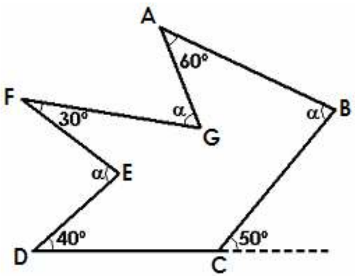
Caso 4. Cuando el elemento central es el 7.
También hay 20 subconjuntos, ya que para elegir los tres números menores lo hacemos de $C_3^6 = 20$ formas y para elegir los tres números mayores lo realizamos de $C_3^3 = 1$ manera.

Para calcular la suma de todos los elementos centrales tenemos que:

20 x 4 + 40 x 5 + 40 x 6 + 20 x 7 = 80 + 200 + 240 + 140 = 660.

SOLUCIÓN 2.

La figura mostrada es un heptágono, así que la suma de sus ángulos internos debe ser 900°. Nombremos cada uno de los vértices del heptágono:



El ángulo A mide 60°, el ángulo B mide α, el ángulo C mide 180° – 50° = 130°, el ángulo D mide 40°, el ángulo E mide 360° – α, el ángulo F mide 30° y el ángulo G mide 360° – α. Sumando los siete ángulos tenemos: 60° + α + 130° + 40° + (360° – α) + 30° + (360° – α) = 900°

980° – α = 900°

α = 80°

SOLUCIÓN 3.

Dividamos el problema de la siguiente manera:

(a) Números del 0 al 999:

Con los dígitos:	Números:
3, 9, 9	399, 393 y 933
4, 8, 9	489, 498, 849, 894, 948 y 984
5, 7, 9	579, 597, 759, 795, 957 y 975
5, 8, 8	588, 858 y 885
6, 6, 9	669, 696 y 966
6, 7, 8	678, 687, 768, 786, 867 y 876
7, 7, 7	777
TOTAL	28 números

(b) Números del 1000 al 1999:

Si el primer dígito es el 1, los demás deben sumar 20:

Con los dígitos:	Números:
1, 2, 9, 9	1299, 1929 y 1992
1, 3, 8, 9	1389, 1398, 1839, 1893, 1938 y 1983
1, 4, 7, 9	1479, 1497, 1749, 1794, 1947 y 1974
1, 4, 8, 8	1488, 1484 y 1884
1, 5, 6, 9	1569, 1596, 1659, 1695, 1956 y 1965
1, 5, 7, 8	1578, 1587, 1758, 1785, 1857 y 1875
1, 6, 6, 8	1668, 1686 y 1866
1, 6, 7, 7	1677, 1767 y 1776
TOTAL	36 números

En total hay 28 + 36 = 64 números.

SOLUCIÓN 4.

Para que no sea múltiplo de 4, tenemos las opciones:

(a) Que todos los dígitos sean impares.
Aquí tenemos: 5 x 4 x 3 = 60 números

(b) Que los dígitos sean impares y un 2.
Aquí tenemos tres formas de acomodar el 2. Para cada acomodo tenemos 5 x 4 = 20 números. Por lo que son 60 números.

(c) Que los dígitos sean impares y un 6.
Aquí tenemos tres formas de acomodar el 6. Para cada acomodo tenemos 5 x 4 = 20 números. Por lo que son 60 números.

En total tenemos 180 números que no son “cuatreados”.

SOLUCIÓN 5.

El número que obtuvo Daniel al final de las multiplicaciones debe ser múltiplo de 5, de 9 y de 11. Para que sea múltiplo de 5, el número debe terminar en 5 o en 0, pero como 561,812 termina en 2, entonces el dígito de las unidades es uno de los erróneos.

Veamos los dos casos:

(a) Si termina en 0:

El número queda como 561,810. Para que sea múltiplo de 9, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 9. Así como está, la suma de sus cifras es 5 + 6 + 1 + 8 + 1 + 0 = 21. Así que a algún dígito debemos sumarle 6 o restarle 3.

Al sumarle 6 sólo se lo podemos sumar a los 1 o al 0 (pero el 0 no lo podemos cambiar porque ya lo habíamos hecho), porque los demás ya no serían dígitos, así que las posibilidades son: 567,810 y 561,870. Para ver si son divisibles entre 11 tenemos:

567,810 ÷ 11 No se puede
561,870 ÷ 11 No se puede

Al restarle 3 lo podemos hacer al 5, 6 u 8. Así obtenemos: 261,810, 531,810 y 561,510. Para ver si son múltiplos de 11 tenemos:

261,810 ÷ 11 No se puede

531,810 ÷ 11 No se puede
561,510 ÷ 11 No se puede

(b) Si termina en 5:
El número queda como 561,815. Para que sea múltiplo de 9, la suma de sus cifras también debe serlo. Así resulta, 5 + 6 + 1 + 8 + 1 + 5 = 26. Por lo que a algún dígito hay que sumarle 1 o restarle 8.

Al sumarle 1 tenemos las siguientes opciones: 661,815, 571,815, 562,815, 561,915, 561,825 y 561,816. Dividiendo entre 11 tenemos:

661,815 ÷ 11 = 60,165 60,165 ÷ 9 = 6685 6685 ÷ 5 = **1337**
571,815 ÷ 11 No se puede
562,815 ÷ 11 = 51,165 51,615 ÷ 9 = 5685 5685 ÷ 5 = **1137**
561,915 ÷ 11 No se puede
561,825 ÷ 11 = 51,075 51,075 ÷ 9 = 5675 5675 ÷ 5 = **1135**
561,816 ÷ 11 No se puede

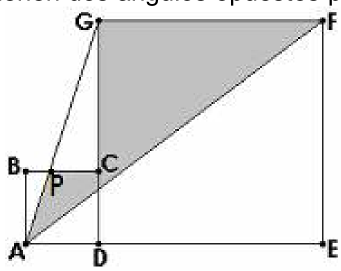
Al restarle 8, sólo obtenemos el número 561,015 el cual no es posible.

Por lo tanto, los únicos números que pudo pensar Beatriz son 1135, 1137 ó 1337.

SOLUCIÓN 6.
Observemos que si aparece el 0 en un letrero también debe aparecer un 9, si aparece un 1 debe aparecer un 8, un 2 con un 7, un 3 con un 6 y un 4 con un 5. Así que para que tengan sólo dos dígitos diferentes pueden ser esas parejas, 0 con 9, 1 con 8, 2 con 7, 3 con 6 y 4 con 5. Lo anterior sucede porque en cada letrero, la suma de ambos números siempre es 999.

Utilizando 0 con 9, tenemos las siguientes opciones: 0, 9, 90, 99, 900, 909, 990, 999. Así que tenemos 8 letreros: 0 – 999, 9 – 990, 90 – 909, 99 – 900, 900 – 99, 909 – 90, 990 – 9, 999 – 0. Lo mismo sucede con las otras cuatro parejas: 111 – 888, 118 – 881, 181 – 818, 188 – 811, 811 – 188, 818 – 181, 881 – 118 y 888 – 111, etc. Así que tenemos 8 x 5 = 40 letreros en donde se utilizan sólo dos cifras diferentes.

SOLUCIÓN 7.
Sea P el punto de intersección de los segmentos AG y BC. Observemos que lo triángulos ABP y GCP son semejantes, ya que ambos triángulos son rectángulos y tienen dos ángulos opuestos por el vértice.



Estableciendo la relación de semejanza tenemos que:

$$\frac{GC}{AB} = \frac{CP}{BP} = \frac{GP}{AP}$$

Pero sabemos que GC = 6 cm y AB = 3 cm. Así que:

$$\frac{6}{3} = \frac{CP}{BP} = \frac{GP}{AP} = 2$$

Por lo que CP = 2 BP. Además, BC = 3 cm, y BP + CP = BC. Eso quiere decir que CP = 2 cm y BP = 1 cm. El área del triángulo GCP es igual a $\frac{6cm x 2cm}{2} = 6cm^2$.

El triángulo AGF tiene de base a FG = 9 cm y de altura a EF = 9 cm, así que su área es igual a $\frac{9cm x 9cm}{2} = \frac{81}{2} cm^2$.

El área sombreada es igual al área del triángulo AFG menos el área del triángulo GCP, es decir $\frac{81}{2} - 6 = \frac{69}{2}$ cm^2.

SOLUCIÓN 8.

Para este problema debemos contar el total de factores 7 que tiene el número 2007!

Primero veamos cuántos múltiplos de 7 hay: $\frac{2007}{7} \approx 286$

Ahora veamos cuántos múltiplos de $7^2 = 49$ hay: $\frac{2007}{49} \approx 40$

Luego veamos cuántos múltiplos de $7^3 = 343$ hay: $\frac{2007}{343} \approx 5$

Finalmente, observemos que no hay múltiplos de $7^4 = 2401$.

Así que el total de factores 7 que tenemos es 286 + 40 + 5 = 331.

Por lo tanto, el mayor valor de n posible es n = 331.

SOLUCIÓN 9.

Construyamos los primeros números de la lista:

2007	$2007^2 = 4028049$	4 + 0 + 2 + 8 + 0 + 4 + 9 + 1 = 28
28	$28^2 = 784$	7 + 8 + 4 + 1 = 20
20	$20^2 = 400$	4 + 0 + 0 + 1 = 5
5	$5^2 = 25$	2 + 5 + 1 = 8
8	$8^2 = 64$	6 + 4 + 1 = 11
11	$11^2 = 121$	1 + 2 + 1 + 1 = 5
5	$5^2 = 25$	2 + 5 + 1 = 8
8	$8^2 = 64$	6 + 4 + 1 = 11
11	$11^2 = 121$	1 + 2 + 1 + 1 = 5

Veamos que a partir del cuarto número en la lista se sigue un ciclo de tres elementos 5, 8, 11, 5, 8, 11, etc.
Si quitamos los tres primeros números de la lista, nos quedan 2004 en donde el ciclo se repite. Sólo hay que dividir 2004 entre 3 para ver si el ciclo cabe completo: $\frac{2004}{3} = 668$. Esto quiere decir que el número que escribió fue el 11.

SOLUCIÓN 10.

Como ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia donde su diámetro es AB, entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo. Si aplicamos el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

El área sombreada la podemos calcular de la siguiente manera:

Área del triángulo ABC + Área del semicírculo con diámetro AC +
+ Área del semicírculo con diámetro BC – Área del semicírculo con diámetro AB

Área del triángulo ABC = $100\ cm^2$

Área del semicírculo con diámetro AC = $\frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot AC^2}{8}$

Área del semicírculo con diámetro BC = $\frac{\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot BC^2}{8}$

Área del semicírculo con diámetro AB = $\frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot AB^2}{8}$

Así que el área sombreada queda como:

$100 + \frac{\pi \cdot AC^2}{8} + \frac{\pi \cdot BC^2}{8} - \frac{\pi \cdot AB^2}{8} = 100 + \frac{\pi}{8}\left(AC^2 + BC^2 - AB^2\right) = 100 + \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - AB^2\right) = 100\ cm^2$.

SOLUCIÓN 11.
Para que el número que encontremos sea múltiplo de 3, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3. Así que no importa la cantidad de cifras 3 que coloquemos siempre y cuando utilicemos una cantidad que sea múltiplo de 3, de dígitos 7.

Esto nos da el menor número posible que es múltiplo de 3: 777, pero no cumple ya que no tiene cifras 3.

Si le agregamos un 3, tenemos los siguientes números: 3777, 7377, 7737 y 7773. Pero ninguno de ellos es múltiplo de 7.

Si a los anteriores les agregamos otro 3, tenemos los siguientes números: 33777, 37377, 37737, 37773, 73377, 73737, 73773, 77337, 77373 y 77733.

De ellos, los primeros dos no son múltiplos de 7 pero el tercero sí. Así que el menor número es el 37737.

SOLUCIÓN 12.
Primero observemos que AB = AC = BC = CD = CE = DE. Así que el triángulo ACD es isósceles, por lo que los ángulos CAD y CDA son iguales y miden 53º.

El ángulo BCD mide 134º ya que es la suma de un ángulo de un triángulo equilátero con el ángulo de 74º. El triángulo BCD también es isósceles así que los ángulos CBD y CDB son iguales y miden 23º.

Los ángulos del triángulo ABD los podemos calcular de la siguiente manera:

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 60^\circ - 23^\circ = 37^\circ$$
$$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 53^\circ - 23^\circ = 30^\circ$$
$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 60^\circ + 53^\circ = 113^\circ$$

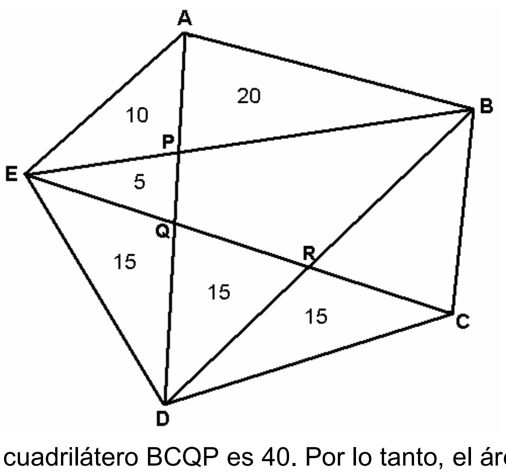
SOLUCIÓN 13.
Como 7 es primo, entonces $a \cdot b \cdot c = 7^p \cdot 7^q \cdot 7^r = 7^{39}$, por lo que p + q + r = 39. Entonces el problema se reduce a encontrar números naturales p, q y r tales que su suma es 39.

Si utilizamos separadores, tenemos que repartir 39 objetos con 2 separadores, pero como cada letra debe tener al menos una unidad, repartimos una de cada una a cada letra y nos quedan 36 objetos por repartir.

El problema se reduce a calcular las permutaciones de 36 objetos y 2 separadores, es decir,

$$P_{(36,2)} = \frac{38!}{36! \times 2!} = \frac{38 \times 37}{2} = 703$$

SOLUCIÓN 14.
Nombremos el resto de los vértices como indica la figura:



Observemos que los triángulos AEP y ABP comparten la altura que sale del vértice A. Así que la razón existente entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón de sus bases, es decir:
$\frac{\text{área(AEP)}}{\text{área(ABP)}} = \frac{EP}{BP}$ así que $\frac{10}{20} = \frac{EP}{BP}$ y de ahí BP = 2EP.

De la misma forma sucede con los triángulos DEQ y DCQ, por lo que CQ = 2EQ.

Por el criterio LAL de semejanza tenemos que los triángulos EPQ y EBC son semejantes y en razón 1 a 3, ya que EC = 3EQ y EB = 3EP. Así que la razón entre sus áreas es 1 a 9. Como el área del triángulo EPQ es 5, entonces el área del triángulo EBC es 45 y por consiguiente, el área del cuadrilátero BCQP es 40. Por lo tanto, el área del pentágono es: 10 + 20 + 5 + 40 + 15 + 15 + 15 = 120.

SOLUCIÓN 15.

La expresión $\frac{1+11n}{2n-1}$ podemos reescribirla como: $\frac{2}{2}\left(\frac{1+11n}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2+22n}{2n-1}\right)$. Esto nos reduce el problema a encontrar para qué valores de n la expresión $\frac{2+22n}{2n-1}$ es un número par.

$$\frac{2+22n}{2n-1}=\frac{22n-11+13}{2n-1}=\frac{11(2n-1)+13}{2n-1}=11+\frac{13}{2n-1}$$

Para que lo anterior sea un número entero, 2n – 1 debe ser un divisor de 13. Esto sólo se cumple para 2n – 1 = 1 y para 2n – 1 = 13, es decir, n = 1 y n = 7.

Como para ambos casos, la expresión $\frac{2+22n}{2n-1}$ es un número par, entonces son los únicos valores que cumplen.

SOLUCIÓN 16.

Sea $\overline{aba}$ el número que deseamos encontrar, entonces la multiplicarlo por 11 nos queda:

$$\begin{array}{rrrr} & a & b & a \\ & & 1 & 1 \\ \hline & a & b & a \\ a & b & a & \end{array} \; x$$

Observemos que en la multiplicación el último dígito es a, así que el primero también debe serlo. La única condición para que eso se cumpla es que a + b no sea mayor o igual que 10, ya que el dígito de la izquierda superaría el valor de a.

Bajo estas condiciones tenemos lo siguiente:

Si a = 1, b puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.
Si a = 2, b puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
Si a = 3, b puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Si a = 4, b puede ser 0, 1, 2, 3, 4 y 5.
Si a = 5, b puede ser 0, 1, 2, 3 y 4.
Si a = 6, b puede ser 0, 1, 2 y 3.
Si a = 7, b puede ser 0, 1 y 2.
Si a = 8, b puede ser 0 y 1.
Si a = 9, b puede ser 0.

Así que todos los números que cumplen son: 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, 404, 414, 424, 434, 444, 454, 505, 515, 525, 535, 545, 606, 616, 626, 636, 707, 717, 727, 808, 818 y 909.

SOLUCIÓN 17.

Para que un número tenga exactamente 5 divisores, necesariamente debe ser un primo q elevado a la cuarta potencia, es decir, q^4. De aquí tenemos que:

$$p^2+77=q^4$$
$$q^4-p^2=77$$
$$(q^2-p)(q^2+p)=77$$

El 77 tiene sólo dos maneras de expresarse como el producto de dos números naturales: 1 x 77 y 7 x 11.

Así que tenemos dos casos:

$(q^2+p)=77$ $(q^2-p)=1$, de donde q^2 = 39 y p = 38. Lo cual no cumple, ya que q no es entero.
$(q^2+p)=11$ $(q^2-p)=7$, de donde q^2 = 9, q = 3 y p = 2.

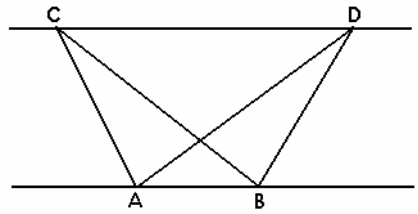
Así que el único primo que cumple es p = 2.

SOLUCIÓN 18.

Este problema se basa en dos hechos importantes:

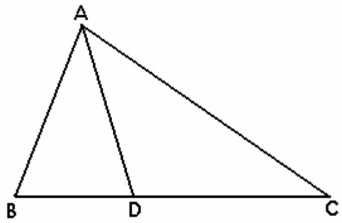
1. Cuando tenemos dos triángulos ABC y ABD con la misma base y el tercer vértice sobre una paralela a la base, entonces sus áreas son iguales.

   Esto sucede porque la distancia entre AB y CD es la misma, que es la altura de ambos triángulos.

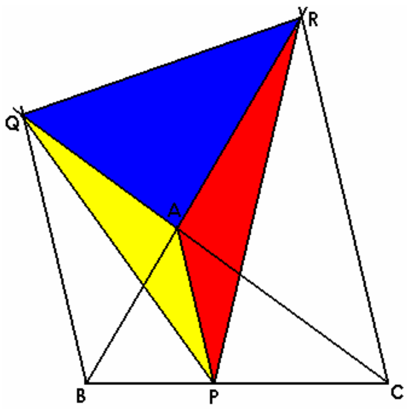


2. Cuando un triángulo ABC está dividido por un segmento AD con D sobre el lado BC, entonces tenemos $\frac{BD}{DC} = \frac{\text{área}(ABD)}{\text{área}(ACD)}$.

   En efecto, la altura h del triángulo ABC que corresponde al vértice A es la misma para los triángulos ABD y ACD. Así que el área(ABD) = $\frac{(BD)h}{2}$ y el área(ACD) = $\frac{(CD)h}{2}$. Así que $\frac{\text{área}(ABD)}{\text{área}(ACD)} = \frac{\frac{(BD)h}{2}}{\frac{(DC)h}{2}} = \frac{BD}{DC}$.



Veamos la figura:



Como AP // BQ, entonces área(APQ) = área(ABP) por el hecho 1. De la misma manera, AP // CR, entonces área(APR) = área(ACP) por el hecho 1.

área(ABC) = área(ABP) + área(ACP) = área(APQ) + área(APR) = 2007

Ahora, ya habíamos dicho que AP // CR así que por Teorema de Tales $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AR} = \frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(ACR)}$.

También, AP // BQ y por Teorema de Tales $\frac{BP}{PC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\text{área}(AQR)}{\text{área}(ACR)}$.

Así que $\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(ACR)} = \frac{\text{área}(AQR)}{\text{área}(ACR)}$ y por lo tanto área(ABC) = área(AQR) = 2007

Finalmente, área(PQR) = área(AQR) + área(APQ) + área(APR) = área(ABC) + área(ABC) = 2007 + 2007 = 4014.

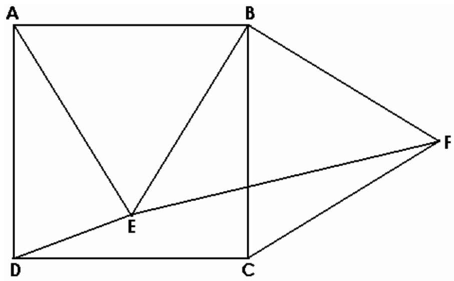
SOLUCIÓN 19.

Sean V_1, V_2, V_3,…, V_{2006} los vértices del polígono de 2006 lados. Tomemos el vértice V_1 y tracemos todas las diagonales que salen de él. Veamos que de ese vértice salen 2003 diagonales, las cuales son: V_1V_3, V_1V_4, V_1V_5,…, V_1V_{2005}.

La diagonal más grande de ellas es la que se forma con el vértice opuesto de V_1, es decir, V_1V_{1004}. Esta diagonal es un eje de simetría para el polígono así que sólo contaremos las diagonales de uno de los dos lados. Dichas diagonales son 1002, las cuales son V_1V_3, V_1V_4, V_1V_5,…, V_1V_{1004}. Cada una de esas diagonales tiene su simétrica, para V_1V_3 es V_1V_{2005}, V_1V_4 es V_1V_{2004}, etc. Quiere decir entonces que para el vértice V_1 existen 1002 diagonales de distintos tamaños.

El resto de las diagonales del polígono se obtienen rotando las que se trazaron a partir de V_1, tomando fijos los demás vértices. Así que sólo existen 1002 longitudes diferentes en las diagonales de un polígono regular de 2006 lados.

SOLUCIÓN 20.



Como ABCD es un cuadrado, y los triángulos ABE y BCF son equiláteros, entonces AB = BC = CD = AD = AE = BE = BF = CF.

Por lo anterior, el triángulo ADE es isósceles. Como el ángulo DAB mide 90º y el ángulo EAB mide 60º, entonces el ángulo DAE mide 30º. Así que los ángulos ADE y AED miden 75º.

De la misma manera, el triángulo BEF es isósceles. El ángulo EBC también mide 30º y el ángulo CBF mide 60º, así que el ángulo EBF mide 90º. Por lo tanto, los ángulos BEF y BFE miden 45º.

Ahora veamos la medida del ángulo DEF: $\angle DEF = \angle DEA + \angle AEB + \angle BEF = 75º + 60º + 45º = 180º$. Por lo que los puntos D, E y F están alineados.

SOLUCIÓN 21.

Sea $\overline{abcba}$ el número capicúa de 5 dígitos.

Caso 1: Los que son múltiplos de 11.

Para que sea múltiplo de 11 se debe que cumplir que (a + c + a) – (b + b) sea múltiplo de 11, es decir, 2a – 2b + c es múltiplo de 11. Ahora analicemos entre qué valores se encuentra dicha expresión:

El mayor valor que pueden tomar a y c es 9 y el menor valor que puede tomar b es 0, así que el máximo valor de la expresión 2a – 2b + c es 2(9) – 2(0) + 9 = 27. De la misma manera, el menor valor que puede tomar a es 1 (porque el número es de 5 dígitos), el menor valor de c es 0 y el mayor valor de b es 9, entonces el mínimo valor de la expresión 2a – 2b + c es 2(1) – 2(9) + 0 = -16.

Así que para que la expresión 2a – 2b + c sea múltiplo de 11, sólo puede ser igual a -11, 0, 11 ó 22.

Veamos cuando 2a – 2b + c = -11 tenemos que: 2(a – b) = -11 – c, así que $a - b = \frac{-11-c}{2}$. Así que c es impar.
Si c = 1, entonces a – b = -6. De aquí obtenemos los números 17171, 28182 y 39193.
Si c = 3, entonces a – b = -7. De aquí obtenemos los números 18381 y 29392.
Si c = 5, entonces a – b = -8. De aquí obtenemos el número 19591.
Para c = 7 y c = 9 no existen números que cumplan.

Veamos cuando 2a – 2b + c = 0 tenemos que: 2(a – b) = – c, así que $a - b = \frac{-c}{2}$. Así que c es par.
Si c = 0, entonces a – b = 0. De aquí obtenemos los números 11011, 22022, 33033, 44044, 55055, 66066, 77077, 88088 y 99099.
Si c = 2, entonces a – b = -1. De aquí obtenemos los números 12221, 23232, 34243, 45254, 56265, 67276, 78287 y 89298.
Si c = 4, entonces a – b = -2. De aquí obtenemos los números 13431, 24442, 35453, 46464, 57475, 68486 y 79497.
Si c = 6, entonces a – b = -3. De aquí obtenemos los números 14641, 25652, 36663, 47674, 58685 y 69696.
Si c = 8, entonces a – b = -4. De aquí obtenemos los números 15851, 26862, 37873, 48884 y 59895.

Veamos cuando 2a – 2b + c = 11 tenemos que: 2(a – b) = – c, así que $a - b = \frac{11-c}{2}$. Así que c es impar.
Si c = 1, entonces a – b = 5. De aquí obtenemos los números 50105, 61116, 72127, 83138 y 94149.
Si c = 3, entonces a – b = 4. De aquí obtenemos los números 40304, 51315, 62326, 73337, 84348 y 95359.
Si c = 5, entonces a – b = 3. De aquí obtenemos los números 30503, 41514, 52525, 63536, 74547, 85558 y 96569.
Si c = 7, entonces a – b = 2. De aquí obtenemos los números 20702, 31713, 42724, 53735, 64746, 75757, 86768 y 97779.
Si c = 9, entonces a – b = 1. De aquí obtenemos los números 10901, 21912, 32923, 43934, 54945, 65956, 76967, 87978 y 98989.

Veamos cuando 2a – 2b + c = 22 tenemos que: 2(a – b) = – c, así que a – b = $\frac{22-c}{2}$. Así que c es par.

Si c = 0, entonces a – b = 11. No es posible.
Si c = 2, entonces a – b = 10. No es posible.
Si c = 4, entonces a – b = 9. De aquí obtenemos el número 90409.
Si c = 6, entonces a – b = 8. De aquí obtenemos los números 80608 y 91619.
Si c = 8, entonces a – b = 7. De aquí obtenemos los números 70807, 81818 y 92829.

En total tenemos 82 números que son múltiplos de 11.

Caso 2: Los que la suma de sus dígitos es 21.

Al sumar sus dígitos tenemos la ecuación 2a + 2b + c = 21, es decir, 2(a + b) + c = 21 con lo cual a + b = $\frac{21-c}{2}$. Para que esto sea un entero, entonces c debe ser impar.
Si c = 1 entonces a + b = 10. Existen 9 números: 91119, 82128, 73137, 64146, 55155, 46164, 37173, 28182 y 19191.
Si c = 3 entonces a + b = 9. Existen 9 números: 90309, 81318, 72327, 63336, 54345, 45354, 36363, 27372 y 18381.
Si c = 5 entonces a + b = 8. Existen 8 números: 80508, 71517, 62526, 53535, 44544, 35553, 26562 y 17571.
Si c = 7 entonces a + b = 7. Existen 7 números: 70707, 61716, 52725, 43734, 34743, 25752 y 16761.
Si c = 9 entonces a + b = 6. Existen 6 números: 60906, 51915, 42924, 33933, 24942 y 15951.

Así que en total hay 39 números.

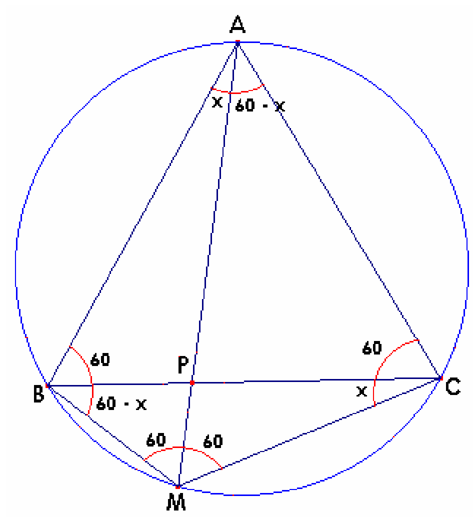
Por lo tanto, hay más números que son múltiplos de 11.

SOLUCIÓN 22.
Sea p^2 el cuadrado perfecto que se obtiene con $x^2 + 3x + 5$, es decir, $x^2 + 3x + 5 = p^2$. Ahora, modificando esta expresión tenemos: $x^2 + 3x + (5 - p^2) = 0$.

Aplicando la fórmula general obtenemos: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(5-p^2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4p^2 - 11}}{2}$.
Como x es un entero, entonces p debe cumplir que $4p^2 - 11$ es un cuadrado perfecto, es decir, $4p^2 - 11 = m^2$. Entonces $4p^2 - m^2 = 11$, y de aquí, (2p + m)(2p – m) = 11. Como 11 es un número primo, entonces 2p + m = 11 y 2p – m = 1, y de aquí m = 5.

Por lo tanto $4p^2 - 11 = 25$ y $x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$, así que $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$.

SOLUCIÓN 23.
Sea P el punto de intersección de AM con BC.



Llamemos x a la medida del ángulo BAM. Como dicho ángulo es inscrito en la circunferencia, abre el arco BM al igual que el ángulo BCM que también mide x. Además, el ángulo BAC mide 60º, así que el ángulo MAC mide 60 – x.

De la misma forma, el ángulo MAC es inscrito en la circunferencia con arco MC, así que el ángulo MBC mide 60 – x también.

Los ángulos ABC y ACB miden 60º, por lo que los ángulos BMA y AMC también miden 60º porque abren los arcos AB y AC.

A partir de los ángulos anteriores obtenemos que los triángulos BPM y ACM son semejantes por el criterio AA. La razón de semejanza queda como sigue:

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BM}{AM} = \frac{PM}{CM}$$

De igual manera, los triángulos CPM y ABM son semejanzas y la razón de semejanza es: $\frac{CP}{AB}=\frac{CM}{AM}=\frac{PM}{BM}$.

Tomando en cuenta las razones anteriores, tenemos que: $\frac{BM}{AM}=\frac{BP}{AC}$ y $\frac{CM}{AM}=\frac{CP}{AB}$.

Como ABC es un triángulo equilátero resulta que AB = BC = AC.

Sumando las razones anteriores obtenemos: $\frac{BM+CM}{AM}=\frac{BM}{AM}+\frac{CM}{AM}=\frac{BP}{AC}+\frac{CP}{AB}=\frac{BP}{AC}+\frac{CP}{AC}=\frac{BP+CP}{AC}=\frac{BC}{AC}=1$

Y como $\frac{BM+CM}{AM}=1$ se cumple que $BM+CM=AM$.

SOLUCIÓN 24.

Cuando tenemos que $|x|<a$, entonces debe cumplirse que $-a<x<a$. Los números m que tenemos que encontrar deben cumplir que $\left|\frac{m-5}{2006m-2010}\right|<\frac{1}{2010}$, es decir, $-\frac{1}{2010}<\frac{m-5}{2006m-2010}<\frac{1}{2010}$.

Veamos las dos desigualdades:

$$-\frac{1}{2010}<\frac{m-5}{2006m-2010}$$
$$-(2006m-2010)<2010(m-5)$$
$$-2006m+2010<2010m-10050$$
$$12060<4016m$$
$$m>3$$

$$\frac{m-5}{2006m-2010}<\frac{1}{2010}$$
$$2010(m-5)<2006m-2010$$
$$2010m-10050<2006m-2010$$
$$4m<8040$$
$$m<2010$$

Así que m = 4, 5, 6, 7, …, 2006, 2007, 2008 y 2009. Por lo tanto, cumplen 2006 valores de m.

SOLUCIÓN 25.

(a) Sea $\overline{ab}$ el número de dos dígitos. Entonces queremos que $\overline{ba}=\overline{ab}+\frac{3}{4}\overline{ab}=\frac{7}{4}\overline{ab}$.

Veamos que $\overline{ba}=\frac{7}{4}\overline{ab}$ es lo mismo que decir $10b+a=\frac{7}{4}(10a+b)$, o sea, $40b+4a=70a+7b$ y $33b=66a$ así que $b=2a$.

Si a = 1, tenemos que b = 2 por lo que se forma el 12.
Si a = 2, tenemos que b = 4 por lo que se forma el 24.
Si a = 3, tenemos que b = 6 por lo que se forma el 36.
Si a = 4, tenemos que b = 8 por lo que se forma el 48.

El dígito a no puede ser mayor que 4 porque b sería mayor o igual que 10 y b es un dígito. Tampoco puede ser cero. Así que los números son: 12, 24, 36 y 48.

(b) Sea $\overline{abc}$ el número de tres cifras. Buscamos que cumplan:

$$\overline{cba}=\overline{abc}+\frac{3}{4}\overline{abc}=\frac{7}{4}\overline{abc}$$
$$4\overline{cba}=7\overline{abc}$$
$$4(100c+10b+a)=7(100a+10b+c)$$
$$400c+40b+4a=700a+70b+7c$$
$$393c=696a+30b$$
$$131c=232a+10b$$

Como 2 divide al lado derecho, entonces 2 divide al lado izquierdo, pero 2 no divide a 131, así que c es par, 2, 4, 6 u 8. Observemos también que 131c y 232a tienen el mismo dígito de las unidades, porque 10b termina en 0.

Analicemos cada caso:

- Si c = 2. Tenemos que 262 = 232a + 10b. Si a es mayor o igual que 2, se pasa, así que a = 1 y por lo tanto b = 3. De aquí resulta el número 132.
- Si c = 4. Tenemos que 524 = 232a + 10b. Si a es mayor o igual que 4, se pasa, así que a = 2 para que 232a termine en 4, entonces b = 6. Así obtenemos el número 264.
- Si c = 6. Tenemos que 786 = 232a + 10b. Así que 232a termina en 6, por lo tanto a = 3 o a = 8, pero con a = 8 tenemos que 232a = 1856. Así que a = 3 y b = 9 para obtener el número 396.
- Si c = 8. Tememos que 1048 = 232a + 10b. Así que 232a termina en 8, por lo tanto a = 4 o a = 9, pero a = 9 se pasa, así que a = 4 y b = 12, lo cual no es posible.

Por lo tanto, los números que cumplen son 123, 264 y 396.

SOLUCIÓN 26.
Solución del Problema 23.

SOLUCIÓN 27.
Cada número múltiplo de 3 es de la forma 3k, los disminuidos en 1 de la forma 3k – 1 y los de la forma 3k – 2 son los disminuidos en 2.

Caso 1: Los 3 vértices son del mismo tipo.
Si todos son del mismo tipo 3k, 3k – 1 ó 3k – 2 la suma de cada dos vértices será igual y por ende sus lados serán todos del mismo color.

Caso 2: Hay 2 vértices del mismo tipo.
Como hay dos del mismo tipo y uno es distinto al sumar cualquiera de los que son iguales con el distinto obtendremos 2 del mismo tipo y por ende, habría dos del mismo color.

Caso 3: Si los 3 son distintos.
Supongamos que sus vértices son 3a, 3b – 1 y 3c – 2. Por lo tanto, la suma de los vértices es:

$$3a + 3b - 1 = 3(a + b) - 1 \text{ y resulta un lado rojo.}$$
$$3a + 3c - 2 = 3(a + c) - 2 \text{ y resulta un lado verde.}$$
$$3b - 1 + 3c - 2 = 3b + 3c - 3 = 3(b + c) - 3 \text{ y resulta un lado azul.}$$

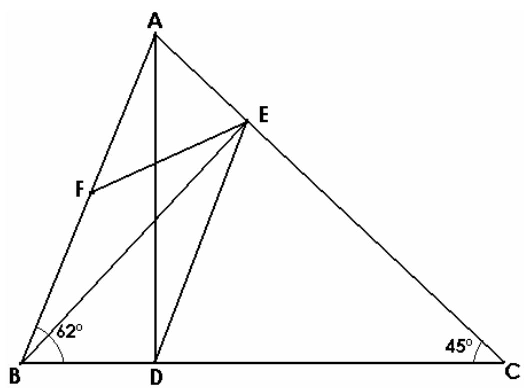
y en este caso hay tres lados distintos.

Ahora sólo hay que ver de cuántas formas se eligen un número de la forma 3k, uno de la forma 3k – 1 y uno de la forma 3k – 2.
Del 1 al 40, hay 13 números de la forma 3k, 13 de la forma 3k – 1 y 14 de la forma 3k – 2. Por ende, la respuesta es 13 x 13 x 14 = 5746.

SOLUCIÓN 28.
Primero probaremos que los triángulos EDC y BAC son semejantes. Como los ángulos ADB y BEA son rectos, entonces el cuadrilátero ABDE es cíclico. Por lo tanto:

$$\angle AED + \angle DBA = 180^\circ$$
$$\angle AED = 180^\circ - \angle DBA = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

y como $\angle AED + \angle DEC = 180^\circ$, $\angle DEC = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$



Pero por criterio AA, los triángulos EDC y BAC son semejantes. De manera análoga tenemos que los triángulos AEF y ABC son semejantes. Por lo tanto, $\angle AEF = 62^\circ$.

Por lo tanto, $\angle FED = 180^\circ - \angle AEF - \angle DEC$

$$\angle FED = 180^\circ - 62^\circ - 62^\circ = 56^\circ$$